

Instationäre starke Stoßfronten

Von K. HAIN und S. v. HOERNER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 9a, 993—1004 [1954]; eingegangen am 31. Juli 1954)

Betrachtet wird der Fall der starken, ebenen, instationären Stoßfront, die in ein ruhendes Gebiet konstanter Dichte hineinläuft. Nach der Charakteristiken-Methode wird ein Rechenverfahren angegeben für die zeitliche Entwicklung einer beliebig vorgegebenen Anfangsverteilung von Geschwindigkeit, Dichte und Druck hinter der Front. — Einige Beispiele wurden gerechnet. Die Untersuchung des zeitlichen Verlaufes der Front sowie eine Analyse der Verteilung hinter der Front zu festen Zeiten ergaben: Alle Anfangsverteilungen mit endlichem Impulsnachschub, so verschieden sie auch sonst gewählt waren, glichen sich mit wachsender Zeit ein und derselben v. Weizsäcker'schen Homologie-Lösung an, mit dem Homologie-Parameter $k = 0,39 \pm 0,01$. — Das gleiche Verhalten zeigten auch Homologie-Lösungen mit anderem k , die in der Nähe der Singularität abgebrochen und heterolog fortgesetzt waren. — Die sich einspielende Verteilung zeigt einen glatten Verlauf mit linearem Abfall der Geschwindigkeit über einen weiten räumlichen Bereich, im Gegensatz zur Singularität der Homologie-Lösungen.

Im Anschluß hieran wurden die Homologie-Gleichungen erneut diskutiert. Häfeler fand eine singuläre Lösung der Gleichungen, die im ganzen Bereich regulär bleibt und die praktisch identisch ist mit der sich stets einspielenden Verteilung.

I. Einleitung und Fragestellung

In der Astrophysik taucht seit einiger Zeit die Frage auf, ob sich die Bewegungsverhältnisse des interstellaren Gases wegen der allgemein hohen Machschen Zahlen mit dem Begriff der Stoßfronten besser beschreiben ließen als mit dem bisher oft verwandten Begriff der Turbulenzelemente. — v. Weizsäcker setzte als Ziel, eine allgemeine statistische Beschreibung zu erhalten von einer Gesamtheit durcheinander laufender Stoßfronten verschiedener Stärke und Ausdehnung. Als erster Schritt dorthin soll die zeitliche Entwicklung einer starken, ebenen Stoßfront untersucht werden, die in ein ruhendes Gas konstanter Dichte läuft.

Die Aufgabe ist also, Lösungen der Eulerschen Gleichungen

$$(\text{Kontinuität}) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1a)$$

$$(\text{Impuls}) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1b)$$

$$(\text{Energie}) \quad \rho \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \kappa p \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0 \quad (1c)$$

zu erhalten, die den an der Front für starken Stoß geltenden Randbedingungen¹ genügen:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_0 \\ p &= \frac{\kappa - 1}{2} \rho u^2 \end{aligned} \right\} \text{an der Front,} \quad (2a)$$

$$(2b)$$

wobei der jeweilige Ort der Front durch Integration einer weiteren Gleichung

$$v = \frac{\kappa + 1}{2} u \quad (3)$$

zu berechnen ist. (ρ Dichte, u Gasgeschwindigkeit, p Druck, ρ_0 Dichte vor der Front, v Geschwindigkeit der Front, κ Verhältnis der spez. Wärmen.)

Das System (1) der drei partiellen Differentialgleichungen ist totalhyperbolisch, d. h. es existieren drei reelle Charakteristiken. Da der Rand (= Front) von einer Charakteristik des rückwärtigen Gebietes noch erreicht wird, verbleiben nur zwei Freiheitsgrade für die zwei Randbedingungen (2). — Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht nun darin, daß erstens die Gleichungen nicht linear sind und daß zweitens der Rand nicht festliegt, sondern zusammen mit der Lösung sich aus (3) erst ergibt.

Durch die Gl. (1) bis (3) ist noch keine Lösung festgelegt. Dies kann im wesentlichen auf zwei Arten geschehen:

1. Aussondern einer speziellen Lösungsklasse, indem man fordert, daß eine Lösung zu verschiedenen Zeiten eine ähnliche räumliche Verteilung besitzt, d. h. daß ihr Typ sich zeitlich nicht ändert. Für diese Lösungen gelten dann gewöhnliche Differentialgleichungen. Die so erhaltenen *Homologie-Lösungen* wurden durch v. Weizsäcker¹ unter-

¹ C. F. v. Weizsäcker, Z. Naturforschg. 9a, 269 [1954].



sucht. Es zeigte sich, daß über einen Homologie-Parameter k noch frei verfügt werden kann. Weiterhin schienen alle diese Lösungen bei endlichem x in einer Singularität zu enden, die entweder in einer Umkehrkante besteht oder in einer Stelle unendlicher Temperatur. Diese Singularitäten werden von Häfele² behandelt. Eine weitere Arbeit von Meyer³ soll auf die Stabilität in der Umgebung von Homologie-Lösungen eingehen.

2. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die zeitliche Entwicklung zu berechnen bei beliebig vorgegebener Anfangsverteilung von Geschwindigkeit, Dichte und Druck im Gebiet hinter der Front. — Abschnitt II und III bringen das benutzte Charakteristiken-Verfahren, Abschnitt IV die Methoden der Auswertung und Abschnitt V die Ergebnisse.

Untersucht werden soll die Frage, ob und wann beliebig vorgegebene Verteilungen sich mit wachsender Zeit Homologie-Lösungen annähern, wenn ja, welcher Wert von k sich dabei ergibt. Weiterhin werden als Ausgangsverteilungen Homologie-Lösungen benutzt, die vor der Singularität stetig, aber nicht mehr homolog fortgesetzt wurden, sowie eine Homologie-Lösung mit einer dicht hinter der Front aufaddierten Störung⁴.

II. Allgemeines Integrationsverfahren für totalhyperbolische Differentialgleichungssysteme mit Hilfe von Charakteristiken (Charakteristikenverfahren)

Wir stellen uns zur Aufgabe, das Differentialgleichungssystem zweier unabhängiger Variabler x und t

$$a^{i\nu} u_t^\nu + b^{i\nu} u_x^\nu + b^i = 0 \quad (i, \nu = 1, \dots, n) \quad (4)^5$$

von n linear unabhängigen Differentialgleichungen 1. Ordnung in den n unabhängigen Variablen u^i zu integrieren. Die $a^{i\nu}$, $b^{i\nu}$, b^i seien stetige Funktionen von x , t und u^i .

Die Koeffizienten $a^{i\nu}$, $b^{i\nu}$ lassen sich nun so transformieren, daß die transformierten Matrizen $(A^{i\nu})$, $(B^{i\nu})$ gewöhnliche Vielfache voneinander werden:

$$A^{i\nu} = CB^{i\nu}.$$

Um das homogene Gleichungssystem, das sich für die Koeffizienten der Transformationsmatrix er-

gibt, auflösen zu können, muß C der Säkulargleichung

$$|A^{i\nu} - CB^{i\nu}| = 0 \quad (5)$$

oder auch

$$|a^{i\nu} - Cb^{i\nu}| = 0 \quad (5a)$$

genügen.

Gl. (4) nimmt dann die Form an

$$A^{i\nu} (u_t^\nu + C^i u_x^\nu) + B^i = 0.$$

Die C^1, \dots, C^n sind die n Wurzeln der Säkulargleichung.

Wie man aus der obigen Gleichung ersieht, sind die C^j die Richtungen, in denen die Variablen u^i in der j -ten Gleichung differenziert auftreten. Diese Richtungen C^j heißen die charakteristischen Richtungen, und die Gleichungen

$$x^j(t) = \int_{t_0}^t C^j dt \quad (6)$$

bestimmen diese Charakteristiken.

Wir nennen das Differentialgleichungssystem dann totalhyperbolisch, wenn alle Wurzeln der Säkulargleichung reell sind, d. h. alle Charakteristiken reelle Kurven in der x, t Ebene sind. Auf diesen Fall wollen wir uns beschränken.

Die Bedeutung der Charakteristiken liegt erstens darin, daß die Lösung im Punkt P nur von einem Bereich abhängig ist, der innerhalb der von P ausgehenden Charakteristikenschar liegt. Das Anfangswertproblem ist dann eindeutig bestimmt, wenn längs einer raumartigen Kurve $y(x, t)$, die alle von P ausgehenden rückwärtigen Charakteristiken schneidet und mit keiner eine gemeinsame Tangente hat, die Funktionswerte an den Schnittpunkten der Charakteristiken vorgegeben sind.

Die zweite wichtige Eigenschaft der Charakteristiken ist, daß es auf jeder Charakteristik x^j eine Invariante α^j geben muß, die auf x^j konstant bleibt; wir können nämlich das Differentialgleichungssystem in der Form schreiben

$$A^{i\nu} u_{\alpha i}^\nu + B^i t_{\alpha i} = 0 \text{ längs } C^i$$

oder, wenn wir die Differenzen längs C^j mit d^j bezeichnen,

$$d^i \alpha^i = A^{i\nu} d^i u^\nu + B^i d^i t = 0 \text{ längs } C^i. \quad (7)$$

Es gibt aber noch einen allgemeineren Typus von Kurven, sog. Randkurven, bei denen nicht mehr n Funktionswerte, sondern nur noch $n - \lambda$ durch Angabe der Funktionswerte oder durch Randbedingungen festgelegt sind. Damit die Lösung eindeutig bestimmt ist, muß diese Kurve noch von λ Charakteristiken ge-

² W. Häfele, Z. Naturforschg., in Vorbereitung.

³ F. Meyer, Z. Naturforschg., in Vorbereitung.

⁴ Die Rechnungen wurden durchgeführt mit der elektronischen Rechenmaschine (G 1) des Institutes;

die Verf. danken Herrn Prof. Biermann für die Möglichkeit ihrer Benutzung.

⁵ Über zweimal vorkommende Indizes ist zu summieren.

schnitten werden. Die Anfangskurve ist ein Spezialfall mit $\lambda = 0$. Hängt außerdem die Randkurve selber wieder von den Funktionswerten ab, so wird auch ihre Form erst durch die Lösung selber festgelegt⁶.

Zur Lösung des Anfangswertproblems wollen wir die ganze x, t -Ebene mit einem Netz zweier Charakteristikenscharen überziehen. Die beiden Charakteristiken C^+ und C^- seien so gewählt, daß alle übrigen innerhalb des von ihnen gebildeten Winkelbereichs liegen. (Diese Eigenschaft hängt nicht von der Lösung ab!)

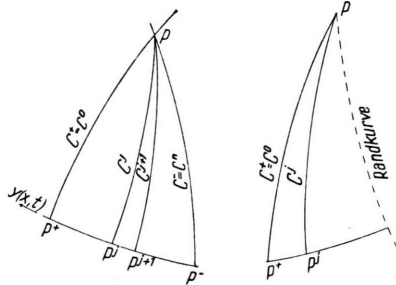


Abb. 1.

Die numerische Integration selber soll in zweiter Ordnung durchgeführt werden. Um dies zu erreichen, hat man nur alle Werte, die auf einer Kurve zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 gelten, durch den Mittelwert ihrer Werte an diesen Punkten zu ersetzen. Dies läuft darauf hinaus, daß man die Kurven zwischen den zur Integration benutzten Punkten durch Parabeln zweiter Ordnung und die längs der Kurve auftretenden Integrale

$$\int f[u(x, t); x, t] ds$$

$$\text{durch} \quad \frac{1}{2} [f(P_1) + f(P_2)] \Delta s$$

ersetzt, was einer Formel zweiter Ordnung gleichkommt.

Wenn wir uns nun die ganze Ebene mit einem Netz der C^+ und C^- -Charakteristiken überzogen denken, genügt zur Lösung des Anfangswertproblems die wiederholte Lösung der folgenden Aufgabe. Es seien die Funktionswerte u^i in den beiden Punkten P^+ und P^- gegeben und die Lage

der beiden Punkte. Gesucht sind die Funktionswerte in P und die Lage von P , wobei P der Schnittpunkt der von P^+ ausgehenden C^+ -Charakteristik und der von P^- ausgehenden C^- -Charakteristik ist. (S. Abb. 2.)

Die weitere Rechnung erweist sich als besonders einfach, wenn wir zur Bestimmung der Funktionswerte in P neben den beiden Punkten P^+ und P^- noch einen weiteren Punkt P^0 heranziehen (außer im Fall von nur zwei unabhängigen Variablen, den wir hier ausschließen wollen). Dabei wählen wir als P^0 den Schnittpunkt der von P^+ und P^- ausgehenden rückwärtigen äußeren Charakteristiken. (S. Abb. 2.) Die Funktionswerte in den Punkten P^j , den Schnittpunkten der C^j -Charakteristiken mit der C^+ -bzw. C^- -Charakteristik, bestimmen wir durch lineare Interpolation zwischen den betreffenden Punkten.

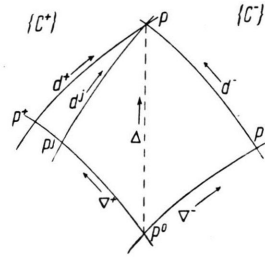


Abb. 2.

Die erste Näherung für die Koordinaten des Punktes P , die sich sofort zu

$$\begin{aligned} \Delta_0 x &= \nabla^+ x + \nabla^- x, \\ \Delta_0 t &= \nabla^+ t + \nabla^- t \end{aligned} \quad (8)$$

ergeben – die Differenzenbezeichnung ist der Abb. 2 zu entnehmen –, soll dazu dienen, das Verhältnis der Abstände

$$\eta^{j\pm} = \frac{P^0 P^j}{P^0 P_{\pm}}, \quad (9)$$

das zur Interpolation gebraucht wird, zu bestimmen. Mit Gl. (8) ergibt sich Gl. (10)⁷, wobei die C_+ und C_- die gemittelten Richtungen der betreffenden Charakteristiken sind:

$$\partial_x u_x / L - \partial_t u_t / L + u / L = 0$$

mit

$$L^2 = 1 + u^2 + u_x^2 - u_t^2$$

verwand.

⁷ Falls die Werte P^+ , P^- , P^0 auf einer Linie $t = \text{const}$ (am Beginn einer Rechnung) liegen, so ergibt sich

$$\eta^{\pm} = 1 - \frac{C_{\pm} - C^j}{C_{\pm} - C^- T} \left(1 - \frac{\nabla^{\pm} x}{\nabla^{\pm} t} \right).$$

⁶ Nach Courant-Hilbert, Meth. der math. Phys., Bd. III, läßt sich auch jede hyperbolische Differentialgleichung 2. Ordnung auf zwei D. Gln. 1. Ordnung zurückführen, die den angegebenen Typus einer total-hyperbolischen D. G. mit zwei Charakteristiken haben. Daher läßt sich die hier angegebene Methode auch für diesen Fall verwenden. Sie wurde von Herrn Pisula hier im Institut zur Integration der nichtlinearen Mesonenwellengleichung

$$\eta^{j\pm} = 1 + \frac{V^\pm t}{V^\pm t} \frac{C^\pm - C^j}{C^\pm - C^j},$$

$$\text{also} \quad V^{j\pm} = \eta^{j\pm} V^\pm. \quad (10)$$

Dabei soll $\eta^{j\pm} > 0$ sein, d. h. es soll wirklich interpoliert werden. Es genügt $\eta^{j\pm}$ in erster Näherung zu berechnen, da eine Änderung zweiter Ordnung in den Koeffizienten $A^{i\nu}$ ebenfalls eine Änderung zweiter Ordnung hervorrufen würde, die uns hier nicht mehr interessiert. Mit der Differenzbeziehung

$$d^j = \Delta - V^j \quad (11)$$

ergibt sich nach Auflösung nach den Differenzen Δu^j

$$\Delta u^j = (A^{j\nu})^{-1} [A^{u(\nu)} V^\nu u^u + B^{(\nu)} d^\nu t]. \quad (12)$$

Die Mittelwerte in den Koeffizienten $A^{i\nu}$ und $B^{i\nu}$ erhält man in ausreichender erster Näherung, indem man annimmt, daß

$$u_0^j(P) = u^j(P^0) + (V^+ + V^-) u^j \quad (12a)$$

gilt. Die Koordinaten von P ergeben sich dann in 2. Näherung zu

$$\Delta t = \frac{V^+ x - C_+ V^+ t - (V^- x - C_- V^- t)}{C_- - C_+}, \quad (13)$$

$$\Delta x = - \frac{V^+ x / C_+ - V^+ t - (V^- x / C_- - V^- t)}{1/C_- - 1/C_+}.$$

Als Beispiel für einen freien Rand untersuchen wir den Fall, daß die Randkurve von einer Charakteristik geschnitten wird — dies kann natürlich nur die C^+ - (bzw. C^-) Charakteristik sein. Ferner sei die Richtung der Randkurve

$$dx/dt = v [u^j(x, t); x, t].$$

In diesem einfachen Fall können wir die Richtung der Randkurve $v(x, t)$ selber als freien Parameter wählen. Da wir $n-1$ Randbedingungen und eine Gleichung zur Festlegung von v haben, können wir diese ganze Gleichung in der Form

$$\Delta u^j / \Delta v = f^j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

schreiben — die Differenzbezeichnung ist der Abb. 3 zu entnehmen —. Wir erhalten dann aus Gl. (14) und der Gl. für die C^+ -Charakteristik sofort

$$\Delta v = \frac{A^{v+} V^+ u^v + B^+ d^+ t}{A^{v+} f^+}. \quad (15)$$

Die in Gl. (15) auftretenden Mittelwerte sind am besten durch Iteration zu bestimmen. Ferner wird

$$\Delta t = \frac{V^+ x - C_+ V^+ t}{V^- - C_+},$$

$$\Delta x = \bar{v} \Delta t. \quad (16)$$

$d^+ t$ (evt. auch Δx , Δt) in Gl. (15) ist zunächst näherungsweise so zu bestimmen, daß man in Gl. (16) v und C_+ an den Stellen P^0 bzw. P^+ einsetzt und dann anschließend iteriert.

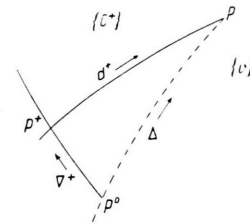


Abb. 3.

III. Anwendung auf die Gasdynamik^{8,9,10}

Zur Berechnung der Stoßwellen gehen wir von den Eulerschen Gleichungen aus, da wir die Wärmeleitung und die Reibung vernachlässigen. R. Becker¹¹ hat gezeigt, daß die Breite einer Stoßfront von der Größenordnung von 2–3 freien Weglängen ist, daher ist es erlaubt, die Eulerschen Gleichungen bis an die Front zu benutzen und an der Front selber Sprungbedingungen anzugeben. Dabei hat man die sehr steilen Gradienten in dem betrachteten Bereich in der Größenordnung von 2–3 freien Weglängen durch Sprünge ersetzt.

Nehmen wir an, daß es sich um ideale Gase handelt, so gilt die Zustandsgleichung

$$e^s = p \varrho^{-\kappa}, \quad \kappa = c_p / c_v, \quad s = S / c_v, \quad (17)$$

mit p = Druck, ϱ = Dichte und S = Entropie. Die Schallgeschwindigkeit a führen wir durch die Gleichung

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_{s = \text{const}}$$

ein. Es ist

$$a^2 = \kappa p / \varrho \quad (17a)$$

bei idealen Gasen. Da sich die Charakteristiken in besonders einfacher Weise in u und a ausdrücken und die Entropie s längs Teilchenbahnen konstant bleibt, ist es zweckmäßig, diese Variablen einzuführen.

⁸ L. Collatz, Numerische Behandlung von Diff. Gl., Berlin (1951).

⁹ P. Hyman, On the Numerical Solution of Partial Differential Equations, Dissertation Delft 1952.

¹⁰ Die Verfasser danken Herrn E. A. Müller vom Max-Planck-Institut für Strömungsforschung für wertvolle Hinweise.

¹¹ R. Becker, Z. Phys. 8, 321 [1922].

Die Eulerschen Gln. (1) ergeben sich unter Benutzung von (17) zu

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \frac{2}{\kappa-1} aa_x - \frac{a^2}{\kappa(\kappa-1)} s_x &= 0, \\ \frac{2}{\kappa-1} (u_t + ua_x) + au_x &= 0, \\ s_t + us_x &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Die zugehörige Säkulargleichung (5a) hat die Wurzeln

$$C^\pm = u \pm a, \quad C^0 = u. \quad (19)$$

Damit ergeben sich die bekannten Hodographengleichungen

$$\begin{aligned} u_{\alpha^\pm} \pm \left(\frac{2}{\kappa-1} a_{\alpha^\pm} - \frac{a}{\kappa(\kappa-1)} s_{\alpha^\pm} \right) &= 0, \\ s_{\alpha^0} &= 0; \end{aligned} \quad (20)$$

α^+ , α^- sind die Riemannschen Invarianten, die längs den C^+ - bzw. C^- -Charakteristiken konstant bleiben, $\alpha^0 = s$ ist die Entropie, die sich längs der Teilchenbahnen nicht ändert.

Das Gleichungssystem lautet in differentieller Form

$$\begin{aligned} d^\pm \alpha^\pm &= d^\pm u \pm \left\{ \frac{2}{\kappa-1} d^\pm a - \frac{a}{\kappa(\kappa-1)} d^\pm s \right\} \\ &= 0 \quad \text{längs } C^\pm = u \pm a; \\ d^0 \alpha^0 &= d^0 s \\ &= 0 \quad \text{längs } C^0 = u. \end{aligned} \quad (21)$$

Δs bestimmt sich sofort zu

$$\Delta s = \eta^\pm v^\pm s. \quad (22)$$

Dabei ergibt sich noch sehr einfach

$$\Delta s = 1 - \frac{v^+ t}{v^- t}. \quad (23)$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} r^\pm &= v^\pm u \pm \left\{ \frac{2}{\kappa-1} v^\pm a - \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} a_\pm (v^\pm s - \Delta s) \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

so folgt durch Auflösung des Gleichungssystems gemäß Gl. (11)

$$\Delta u = \frac{1}{2} (r^+ + r^-), \quad \Delta a = \frac{\kappa-1}{4} (r^+ - r^-). \quad (25)$$

Wir ersetzen die Mittelwerte a_\pm durch

$$a_\pm = a^\pm + \frac{1}{2} v^\pm a \quad (26)$$

und erhalten die zweite Näherung. Die Koordinaten berechnen wir dann nach Gl. (13).

Bei starken Stoßwellen¹, d. h. bei solchen, bei denen die Temperatur vor der Stoßfront vernach-

lässigbar klein ist, lauten die Randbedingungen für in ein ruhendes Medium hereinlaufende Stoßwellen

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{\kappa+1} v, \quad a = \sqrt{\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}} u, \\ \varrho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \varrho_0, \quad s > s_0. \end{aligned}$$

Bei den exakten Frontbedingungen geht immer noch das *Quadrat* der Machschen Zahl, d. h. das Verhältnis der Schallgeschwindigkeit vor der Front zur Frontgeschwindigkeit ein, dies bedeutet, daß die Formel oben bei verhältnismäßig kleinen Machschen Zahlen, etwa ab 5, schon mit hinreichender Genauigkeit für unsere Rechnungen gilt.

In der Form der Gl. (14) geschrieben lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{2}{\kappa+1} \Delta v, \\ \Delta a &= \frac{2}{\kappa+1} \sqrt{\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}} \Delta v, \\ \Delta s &= 2 \Delta v / v. \end{aligned} \quad (27)$$

Nach Gl. (17) wird daraus

$$\Delta v = \frac{\Delta^+ u + \frac{2}{\kappa-1} v^+ a - \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} a_+ v^+ s}{\frac{2}{\kappa+1} + \frac{2}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - \frac{2}{\kappa(\kappa-1)} \frac{a_+}{\bar{v}}}. \quad (28)$$

In dieser Gleichung sind für a_+ und \bar{v} die betreffenden Mittelwerte einzusetzen. Es wird nun aber

$$\frac{a_+}{\bar{v}} = \frac{a^+ \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^+ a}{a^+} \right)}{v^0 \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right)} = \frac{a^+ + a^0}{2 v^0}.$$

Dies ist aber unabhängig von dem Wert in P , d. h. es ist nur der Wert von a im Zähler zu berücksichtigen. Setzen wir

$$\Delta_0 v = \frac{\kappa+1}{2} \quad (29)$$

$$\frac{v^+ u + \frac{2}{\kappa-1} v^+ a - \frac{1}{2\kappa(\kappa-1)} (a^+ + a^0) v^+ s}{1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - \frac{\kappa+1}{2\kappa(\kappa-1)} \frac{a^+ + a^0}{v^0}},$$

so wird wegen der Randbedingung für a

$$\Delta v = \Delta_0 v \left(1 - \frac{1}{\kappa+1} \sqrt{\frac{1}{2\kappa(\kappa-1)}} v^+ s \right). \quad (30)$$

Wir geben uns die Anfangswerte u, a, s für $t=0$ vor und berechnen dann die Entwicklung dieser Gaswolke in der Zeit. Die Rechnung erfolgt dann wie in Teil II angegeben. Die numerische Integration wurde, um den Frontverlauf möglichst weit in der Zeit verfolgen zu können, längs der $u + a$ Charakteristiken durchge-

führt. Um den Abstand der $u-a$ ungefähr gleich dem Abstand der $u+a$ Charakteristiken zu machen, wurde an der Front für jede $u+a$ Charakteristik zunächst von einem in der Mitte liegenden Punkt (z. B. zwischen P_{11} und P_{23}) ein sog. Zwischenfrontpunkt (P_2') berechnet und von diesem eine neue $u-a$ Charakteristik ausgehen lassen. Danach wurde schließlich der endgültige Frontpunkt (24) bestimmt.

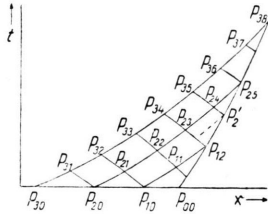


Abb. 4.

Die Abgriffe, d. h. die Abstände der Charakteristiken auf der x -Achse für $t=0$, wurden automatisch so geregelt, daß die Entropiedifferenz an der Front von Charakteristik zu Charakteristik einen gewissen Betrag nicht überstieg. Dadurch wurde das übermäßige Auseinanderlaufen der Charakteristiken verhindert.

Da uns die Verteilungen für konstante Zeit interessieren, wurde ferner ein Interpolationsschema für konstante Zeiten eingebaut. Es werden dabei immer zwischen den Punkten P und P^0 die Funktionswerte u, a, s linear interpoliert, falls die Interpolationszeit zwischen diesen Punkten liegt.

Eine Fehlerabschätzung läßt sich leider nicht leicht angeben. Es wurde daher versucht, den Fehler dadurch abzuschätzen, daß man einmal mit doppelter Schrittweite (doppeltem Abgriff) integrierte. Diese Probe wurde an einem Beispiel gemacht, das bei normalem Abgriff schon hart an der Grenze lag und bei doppelter Schrittweite schlecht stimmen sollte. Der Fehler lag dennoch bei etwa 0,5%, während der Interpolationsfehler diesen Fehler schon überstieg. Dies bedeutet, daß bei unseren normalen Rechnungen der Fehler sicher nicht 1% übersteigt.

IV. Untersuchung auf Homologie

Wir wollen hier numerisch nachprüfen, ob die von uns durch Integration der partiellen Differentialgleichungen gefundenen Lösungen für verschiedene Anfangsverteilungen einer Homologie-Lösung mit einem bestimmten Parameter k ähnlich sind.

Wir machen den Homologie-Ansatz, wie von v. Weizsäcker¹ vorgeschlagen, in der Form

$$\begin{aligned}\xi &= (x - x_0) (t - t_0)^{k-1}, \\ u &= (t - t_0)^{-k} \varphi(\xi), \\ a &= (t - t_0)^{-k} \psi(\xi), \\ s &= -2k \ln(t - t_0) + \sigma(\xi).\end{aligned}\quad (31)$$

Wir setzen dies in Gl. (21) ein, die wir hier in der Form

$$(u \pm a) \alpha_x^\pm + \alpha_t^\pm = 0, \quad u \alpha_x^0 + \alpha_t^0 = 0 \quad (32)$$

schreiben, wobei unter α_x^\pm, α_x^0 bzw. α_t^\pm, α_t^0

$$\alpha_x^\pm = u_x \pm \left\{ \frac{2}{\kappa - 1} a_x - \frac{a}{\kappa(\kappa - 1)} s_x \right\}, \quad \alpha_x^0 = a s_x \quad (32a)$$

zu verstehen ist (entsprechend für die Ableitungen nach t). Bezeichnen wir ferner die homologen Invarianten mit A^\pm bzw. A^0 , so erhalten wir aus Gl. (32)

$$\begin{aligned}\frac{dA^\pm}{d\xi} &= k \frac{\varphi + 2\psi/\kappa}{(k-1)\xi + \varphi \pm \psi}, \\ \frac{dA^0}{d\xi} &= k \frac{2\psi}{(k-1)\xi + \varphi}.\end{aligned}\quad (33)$$

Die Ableitungen $d/d\xi$ sind entsprechend Gl. (32a) geschrieben, also keine exakten Differentialquotienten. Setzen wir die ursprünglichen Werte u, a und s darin ein, so erhalten wir für $t = \text{const}$

$$\begin{aligned}\alpha_x^\pm &= \frac{k}{t - t_0} \frac{u \pm 2a/\kappa}{(k-1) \frac{x - x_0}{t - t_0} + u \pm a}, \\ \alpha_x^0 &= \frac{k}{t - t_0} \frac{2a}{(k-1) \frac{x - x_0}{t - t_0} + u}.\end{aligned}$$

(Der Faktor a in der letzten Gleichung wurde angebracht, damit alle Gleichungen dimensionsgleich sind.) Setzen wir

$$\beta = \frac{k}{t - t_0}, \quad \gamma = (k-1) \frac{x - x_0}{t - t_0}, \quad (34)$$

so wird

$$\alpha^\pm = \beta \frac{u \pm 2a/\kappa}{\gamma + u \pm a}, \quad \alpha^0 = \beta \frac{2a}{\gamma + u}. \quad (35)$$

Das Gleichungssystem für β, γ ist überbestimmt, da k, x, t nur in diesen beiden Kombinationen in der Homologie-Lösung vorkommen. Dies rührt daher, daß die Forderung der Homologie eine Forderung an die Form der Lösung ist — es wird verlangt, daß sich die Werte längs $\xi = \text{const}$ nicht ändern — und nicht jede Lösung der hydrodynamischen Gleichungen wird eine Homologie-Lösung sein.

Man kann nun versuchen, das überbestimmte Gleichungssystem nach Methoden der Ausgleichsrechnung, die gleich erläutert werden sollen, nach

den Unbekannten β und γ aufzulösen. Auf diese Weise wird es möglich sein, jeder beliebigen Verteilung ein mittleres k zuzuordnen. Weiterhin kann man an dem Fehler, den dieses k besitzt, ablesen, wie genau die untersuchte Lösung einer Homologie-Lösung gleichkommt. Zunächst ergibt sich für k aus Gl. (34)

$$k = \frac{1}{1 - \gamma_x/\beta}, \quad \gamma_x = \frac{\partial \gamma}{\partial x}. \quad (36)$$

Die Ausgleichsrechnung sei hier kurz skizziert. Haben wir ein Gleichungssystem der Form

$$\mathfrak{U}\xi = \mathfrak{b},$$

wobei \mathfrak{U} eine Matrix mit n Spalten und $m \geq n$ Zeilen und \mathfrak{b} ein Vektor mit m Komponenten ist, so kann man dieses durch Multiplizieren mit \mathfrak{U}^T auf n Gleichungen für ξ reduzieren

$$\bar{\xi} = (\mathfrak{U}^T \mathfrak{U})^{-1} \mathfrak{U}^T \mathfrak{b}.$$

Der Fehler σ_i , den man dabei begeht, beträgt, wenn wir

$$R = \mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}} - \mathfrak{U}^T \mathfrak{b}\bar{\xi}$$

definieren,

$$\sigma_i^2 = R (\mathfrak{U}^T \mathfrak{U})_{ii}.$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich für σ_k

$$\sigma_k^2 = \sigma_{\gamma_x}^2 \left(\frac{\partial k}{\partial \gamma_x} \right)^2 + \sigma_{\beta}^2 \left(\frac{\partial k}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{k^4}{\beta^2} \left\{ \sigma_{\gamma_x}^2 + \sigma_{\beta}^2 \frac{\gamma_x^2}{\beta^2} \right\}.$$

Ferner wäre nach demselben Gesetz

$$\sigma_{\gamma_x} = \sigma_{\gamma} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \gamma} = \sigma_{\gamma} \frac{2}{\Delta x}.$$

Dieser Fehler schien uns aber zu groß, da es sich hier ja nicht um rein statistische, sondern um systematische Abweichungen handelt. Wir setzten daher plausiblerweise an

$$\sigma_{\gamma_x} = 2 \sigma_{\gamma} \frac{\gamma_x}{\gamma},$$

indem wir uns sagten, daß der Fehler, der durch das Vorkommen von γ in Gl. (36) gemacht wird, gewissermaßen zweimal gemacht wird, da γ zweimal in den Gleichungen auftritt. Der Faktor γ_x/γ muß aus Dimensionsgründen hinzugefügt werden. Man erhält dann

$$\sigma_k^2 = k^2 (k-1)^2 \left\{ 4 \left(\frac{\sigma_{\gamma}}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\beta}}{\beta} \right)^2 \right\}. \quad (37)$$

Um die gerade abgeleitete Formel anwenden zu können, ist es nötig, zweite Ableitungen zu bilden. Da sich bei numerischen Rechnungen kleinere Schwankungen nur schwer vermeiden lassen, war es nötig, die Werte von u , s und a vorher zu glätten. Zu diesem Zweck legten wir durch je fünf Punkte eine einfache Parabel, die so bestimmt wurde, daß das Abweichungsquadrat von dieser Parabel ein Minimum wird. (Formeln: vgl. z. B. Willers: Praktische Methoden der Analysis.)

Um diese Glättungsformeln einfach anwenden zu können, und auch um eine bessere Übersicht über den Verlauf der Funktionen für konstante Zeiten zu ge-

winnen, wurde die nach der Methode des vorigen Abschnitts gewonnene Lösung durch lineare Interpolation auf konstante x -Abstände gebracht. Außerdem wurden noch die Werte p , q und T berechnet. Der Maßstab in x wurde so normiert, daß der Abfall an der Front für u immer derselbe war. Dies wurde einfach dadurch erreicht, daß man die Stelle, an der u auf $2/3$ abgefallen war, immer an die gleiche Stelle ($x=1$) brachte. Der Verlauf von u ist nach längerer Zeit nahezu linear, da wir uns dann meist in der Nähe von $k=5/13$ befinden, und dort verschwindet, wenigstens in der Nähe der Front, die zweite Ableitung von u nach dem Ort¹.

Ferner kann man noch aus der zeitlichen Änderung der Entropie an der Front ein k_f bestimmen. Man erhält aus Gl. (31)

$$k_f = - \frac{1}{2} \frac{(\dot{s})^2}{\ddot{s}}, \quad (38)$$

wobei der Punkt hier die zeitliche Ableitung längs der Front bedeutet.

V. Gerechnete Beispiele

1. Erwartung und Auswahl

Das Ziel der Arbeit ist die Untersuchung, ob und wie weit sich beliebig vorgegebene Anfangsverteilungen im Laufe der Zeit Homologie-Lösungen angleichen. — Dabei ist zunächst die Frage, bei welchem Typ von Anfangsverteilung wir dies überhaupt erwarten können; denn schließlich kann jeder beliebige zeitliche Frontverlauf durch eine entsprechend gewählte Anfangsverteilung erzwungen werden.

Anschaulich beschrieben ist nun eine Homologie-Lösung eine Verteilung, die mit wachsender Zeit nur die Maßstäbe ihrer Skalen, nicht aber ihre Form ändert, die also zu sich selbst ähnlich bleibt. — D. h. aus dem Verlauf zu einer Zeit erhalte ich durch eine lineare Skalentransformation den Verlauf zu einer anderen Zeit.

Es konnte zwar nicht mathematisch präzisiert werden, erschien aber einleuchtend, daß solche konstanten Verhältnisse sich aus beliebigen Anfangsverteilungen (falls überhaupt) nur dann einspielen können, wenn auch das rückwärtige Gebiet weitgehend durch die Front allein bestimmt ist, d. h. wenn weit hinten kein wesentlicher *Impulsnachschub* vorhanden ist. Lassen wir z. B. die Geschwindigkeit hinter der Front stark ansteigen, so wird der zeitliche Verlauf der Front sehr stark von der Art dieses Anstieges abhängen. Lassen wir dagegen die Geschwindigkeit hinter der Front

stark abfallen, so wird aus diesem schnell von der Front wegfliegenden Bereich nur wenig Einfluß an die Front gelangen können, so daß der zeitliche Verlauf der Front von der Art dieses Abfalles nur wenig abhängen wird. Und ähnlich verhält es sich mit Anstieg oder Abfall von Dichte und Temperatur.

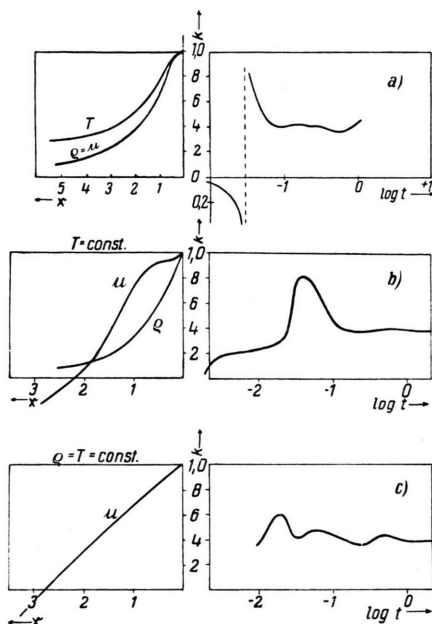


Abb. 5. Drei willkürlich gewählte Anfangsverteilungen. Rechts: der jeweilige zeitliche Verlauf des Homologie-Parameters k längs der Front.

Alle gerechneten Beispiele sind also so ausgewählt, daß der Impulsnachschub auf irgendeine Weise nach hinten praktisch begrenzt ist: durch einen steilen Abfall von Geschwindigkeit, Dichte oder Temperatur. Innerhalb dieser einen Bedingung wurden die Beispiele jedoch möglichst verschieden gewählt, wie aus den linken Seiten der Abb. 5 bis 8 zu ersehen ist. (Lediglich bei der Temperatur wurde ein zu steiler Abfall vermieden, um die Bildung weiterer Stoßfronten im rückwärtigen Gebiet zu verhindern.) Angewandt heißt dies: wir lassen in ein ruhendes Gas eine einzelne Wolke hineinlaufen, die hinten irgendwie „zu Ende“ ist, hinter der keine weitere Wolke „nachschiebt“.

2. Der Verlauf der Front

Für die Frage des Sichanschmiegens an eine Homologie-Lösung betrachten wir zunächst nur den Frontverlauf. Bezeichnen wir mit $s_f(t)$ die Entropie direkt hinter der Front in Abhängigkeit von der Zeit, so kann man nach Formel (38) jedem Frontverlauf *formal* einen Homologie-Parameter k zuordnen:

$$k(t) = -\frac{1}{2} \frac{(\dot{s}_f)^2}{\ddot{s}_f},$$

wobei Homologie bedeuten würde $k(t) = \text{const.}$

Abb. 5 zeigt links drei willkürlich gewählte Anfangsverteilungen, und rechts ist der jeweilige Verlauf von k längs der Front über dem Logarithmus der Zeit aufgetragen. Das Ergebnis lautet: nach anfänglichen starken Schwankungen spielt sich k auf einen etwa *konstanten* Wert ein, und zwar in allen drei Fällen auf den *gleichen* Wert von rund 0,4. Eine Diskussion der Rechengenauigkeit zeigte, daß die dann noch verbleibenden kleineren Schwankungen von k innerhalb der Rechenfehler liegen (zweimaliges Differenzieren von s !) und somit nicht reell zu sein brauchen.

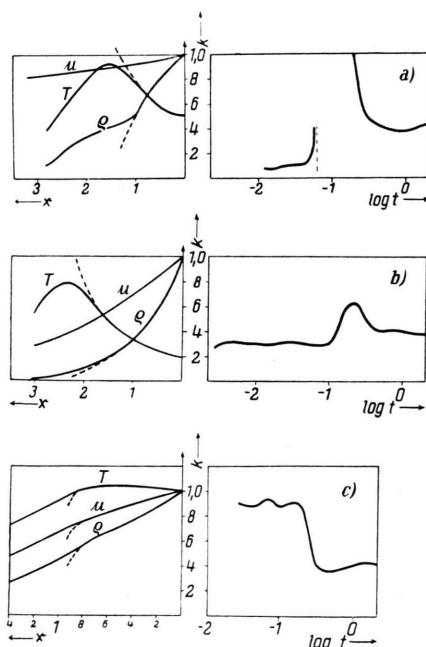


Abb. 6. Als Anfangsverteilungen drei Homologie-Verteilungen mit $k = 0,1, 0,3$ u. $0,9$, die vor ihrem Abbiegen in die Singularität (gestrichelt) willkürlich fortgesetzt wurden.

Drei weitere Anfangsverteilungen zeigt Abb. 6. Es wurden hier Homologie-Verteilungen gewählt, die in der Nähe ihrer Singularität (gestrichelt) willkürlich, aber wiederum abfallend fortgesetzt wurden. Die Verteilungen der Abb. 6a, b und c gehören zu den k -Werten: 0,1, 0,3 und 0,9. — Diese drei Werte muß nun auch das längs der Front berechnete $k(t)$ haben, solange nur die Charakteristiken des homologen Teiles der Anfangsverteilungen in die Front einlaufen. An den im ersten Teil der

Kurven $k(t)$ auftretenden Schwankungen ist somit die Rechengenauigkeit direkt abzulesen. Es folgt ein Übergangsbereich mit stark variablem k , und wiederum ein Sich-einspielen auf etwa den gleichen k -Wert wie bei Abb. 5, der dann sehr lange Zeit (logarithmische Skala!) beinahe konstant bleibt.

Alle sechs gerechneten Beispiele schmiegen sich also in ihrem Frontverlauf einer Homologie-Lösung an, und zwar alle der gleichen Homologie-Lösung, obwohl die sechs Anfangsverteilungen völlig verschieden gewählt waren. Für dieses sich einstellende k erhalten wir durch Mittelbildung:

$$k_f = 0,39 \pm 0,01. \quad (39)$$

Die nächsten beiden Anfangsverteilungen (Abb. 7) stellen die Homologie-Lösung $k=0,39$ dar mit zwei verschiedenen Störungen der Dichte. Solange die Charakteristiken des kurzen, rein homologen Teiles in die Front laufen, ist dort natürlich auch $k=0,39$. Nach einer starken Störung des Frontverlaufes spielt sich aber wieder das gleiche k ein.

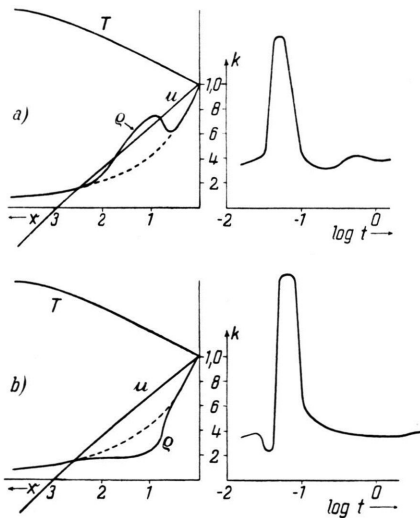


Abb. 7. Die Homologie-Verteilung $k=0,39$ mit zwei verschiedenen Dichtestörungen als Anfangsverteilung.

Als nächstes wäre nun die Frage zu beantworten: bleibt dieses sich stets einstellende k auch wirklich weiterhin konstant? Oder steigt es z. B. nach längerer Zeit ganz langsam monoton an?

Andererseits müssen wir in der x, t -Ebene stets eine Fläche berechnen, so daß der Rechenaufwand *quadratisch* mit der Zeit anwächst. Um die Rechnungen soweit durchzuführen wie bisher, brauchten wir bereits etwa 500 Punkte der x, t -Ebene für jede Anfangsverteilung und (einschließlich aller Auswertungen) etwa 400 einzelne Rechenoperationen für jeden

Punkt. Eine wesentliche Vergrößerung des Rechenaufwandes würde somit die Kapazität der „G 1“ übersteigen. — Nun wissen wir aber bereits, daß k lange Zeit etwa konstant bleibt. D. h., daß wir einen weiten Bereich der x, t -Ebene näherungsweise als homolog betrachten können und nicht erst zu berechnen brauchen. Wir wählen also in Abb. 8 als Ausgangsverteilung die Homologie-Lösung mit $k=0,39$, die wir kurz vor ihrer Singularität willkürlich (aber wiederum abfallend) fortsetzen. Durch ein Umrechnungsverfahren erhalten wir aus den Lösungen von Häfele² die letzte noch homologe Charakteristik, an die wir nun die Berechnung des gestörten Teiles anschließen. — Man wird erwarten können, daß dies Verfahren bei erträglichem Rechenaufwand doch näherungsweise die gestellte Frage des Verhaltens nach sehr langer Zeit beantworten kann.

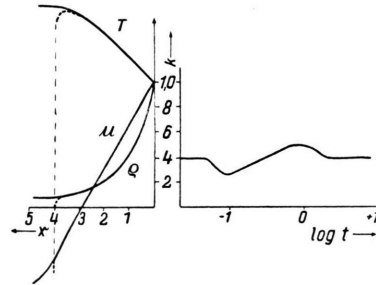


Abb. 8. Als Anfangsverteilung die Homologie-Verteilung $k=0,39$, dicht vor ihrer Singularität willkürlich fortgesetzt. Rechts: der Frontverlauf von k , nachdem die Störung die Front erreicht hat.

Der rechte Teil der Abb. 8 zeigt, daß sich an der Front nach dem Durchlaufen einer kleinen Störung auch hier wieder etwa $k=0,39$ einstellt und konstant bleibt. Es erscheint somit als recht gut gesichert, daß dieser sich stets einstellende Wert von k weiterhin zeitlich unverändert bleibt. Ein verbleibendes schwaches Pendeln um einen festen Wert herum kann bei der vorliegenden Rechengenauigkeit allerdings weder bestätigt noch ausgeschlossen werden.

3. Der rückwärtige Bereich

Um den Verlauf von Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur zu verschiedenen Zeiten miteinander vergleichen und auf Homologie (d. h. Ähnlichkeit) prüfen zu können, führten wir eine Normierung ein, indem wir alle Größen durch ihre Frontwerte dividierten. Der Nullpunkt der x -Skala wurde an die Front gelegt und die Skala selbst so normiert, daß bei $x=1$ die Geschwindigkeit gerade auf $2/3$ ihres Frontwertes abgefallen ist.

Für die Anfangsverteilung der Abb. 5a zeigt Abb. 9, daß auch im rückwärtigen Bereich sich

konstante Verhältnisse einspielen. Geschwindigkeit, Druck und Temperatur schmiegen sich mit wachsender Zeit einer endgültigen Verteilung an, für die wir probeweise die Homologie-Lösung $k=0,39$ einzeichneten*. — Das gleiche asymptotische Verhalten zeigten auch alle übrigen gerechneten Beispiele.

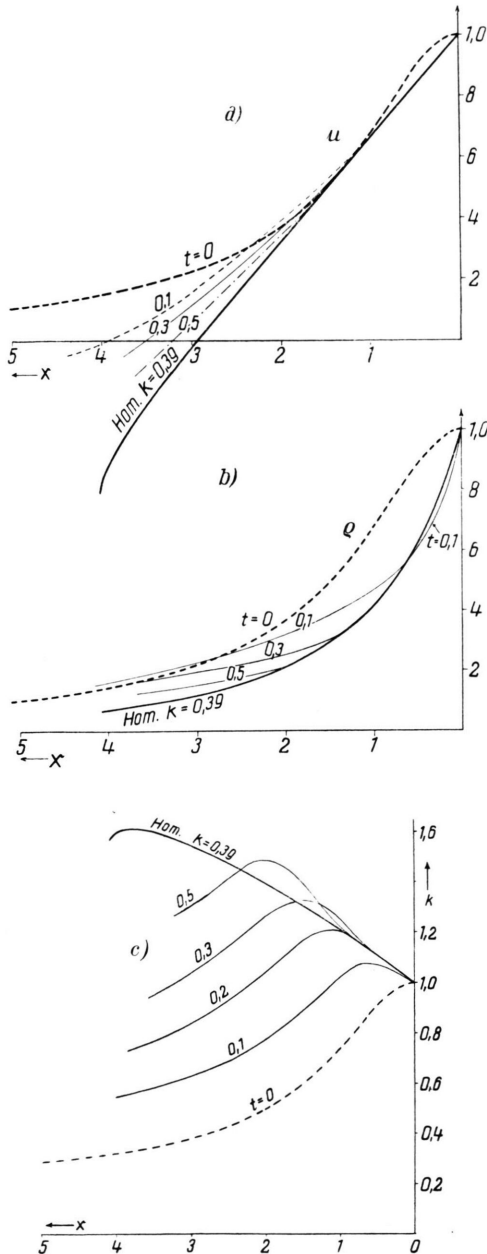


Abb. 9. Geschwindigkeit, Dichte und Temperatur nähern sich mit wachsender Zeit der Homologie-Verteilung $k=0,39$ an. Ausgangsverteilung ist die der Abb. 5a.

In Abschnitt IV schilderten wir ein Verfahren, nach dem wir jedem Punkt der x, t -Ebene ein $k(x, t)$ zuordnen können. Der Fehler $\sigma(x, t)$ ist dabei ein Maß dafür, wie stark die Abweichung der Verteilung von einer Homologie-Lösung ist. Für die Anfangsverteilung der Abb. 6b sehen wir in Abb. 10 den Verlauf von k . Die Verteilung 6b war

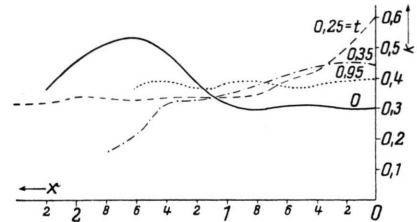


Abb. 10. Konstantwerden von k im rückwärtigen Bereich für die Anfangsverteilung der Abb. 6b.

eine heterolog fortgesetzte Homologie-Verteilung mit $k=0,3$. Also müssen wir für $t=0$ und kleine x -Werte $k(x, 0)=0,3$ erhalten. Der Verlauf für größere x -Werte entspricht dann der heterologen Fortsetzung. Dabei war σ für kleine x etwa 1–2% (Rechengenauigkeit nach Auswertung), um dann schnell bis über 100% anzusteigen. — Der Verlauf der anderen Kurven zeigt, daß k mit wachsender Zeit die Tendenz hat, konstant zu werden. Alle übrigen Rechenbeispiele verhalten sich ebenso. Das verbleibende schwache Pendeln liegt wieder innerhalb der Rechengenauigkeit; auch für diese k -Auswertung mußte zweimal differenziert werden.

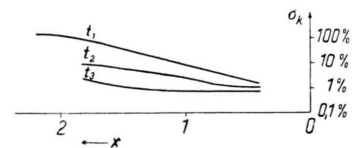


Abb. 11. Der über alle Rechenbeispiele gemittelte Verlauf von $\sigma(x, t)$ zu den durch (40) definierten Zeitpunkten.

Einen über alle gerechneten Beispiele gemittelten Verlauf von σ zeigt Abb. 11. Dabei wurden die Zeiten t_1 , t_2 und t_3 aus den rechten Seiten der Abb. 5 bis 10 folgendermaßen festgelegt:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \text{Zeit des größten Ausschlages von } k_f, \\ t_2 &= \text{Zeit des Erreichens von } k_f = 0,39, \\ t_3 &= \text{möglichst später Zeitpunkt, } \approx 5 \cdot t_2. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

* Bis dicht vor ihrer Singularität ist diese Lösung von der später gefundenen singulären Lösung praktisch nicht verschieden.

Wir sehen aus Abb. 11, daß die Darstellbarkeit durch eine Homologie-Lösung für jeden Zeitpunkt mit wachsender Frontentfernung abnimmt und für feste Frontentfernung mit wachsender Zeit zunimmt.

Für alle vorhandenen und genügend weit hinter t_2 liegenden Zeiten wurde k gemittelt, aber nur so weit in x -Richtung, als die jeweiligen σ -Werte kleiner als 1% waren. Es ergab sich

$$k = 0,390 \pm 0,006. \quad (41)$$

Der Bereich, aus dem dieses k bestimmt wurde, liegt zwischen $x=0,4$ und etwa $x=1,3$, und die Übereinstimmung mit (39) ist gut.

4. Das Gebiet sehr weit hinten

Die Ergebnisse des bisherigen Teiles konnten wir so darstellen, daß der Frontverlauf und das anschließende Gebiet sich stets einer Homologie-Lösung mit $k=0,39$ mit wachsender Zeit anschmiegen. Andererseits schien aus den Arbeiten v. Weizsäckers¹ und Häfeles² hervorzugehen, daß jede Homologie-Lösung (außer der stationären) eine Singularität bei endlichem x besitzt. Für $k=0,39$ besteht die Singularität in einer Umkehrkante, die mit unserer Normierung der x -Skala bei $x=3,9$ liegt. Es ist also nun die Frage zu beantworten, wie die sich einspielende Verteilung für diese Stelle und größere x -Werte aussieht.

Die Schwierigkeit des quadratisch in t anwachsenden Rechenaufwandes wurde schon in Abschn. 2 diskutiert, wir legen also auch für diese Frage die Ausgangsverteilung der Abb. 8 zugrunde. In Abb. 12 sehen wir die sich einspielende Verteilung von u , q , T über einem weiten Bereich der x -Skala aufgetragen. Um zu zeigen, daß sich die Verteilung bereits fertig eingespielt hat, haben wir zwei Zeitschnitte eingezeichnet, die sich in der Zeit um etwa einen Faktor zwei unterscheiden: $t=8,9$ und $t=16,9$. Zum Vergleich: bei $t=15,6$ wird die Front von der ersten Charakteristik der heterologen Fortsetzung der Ausgangsverteilung erreicht. — Da wir die Schrittweite größer als bisher wählen mußten, ist die Rechengenauigkeit etwas herabgesetzt, die Unterschiede beider Zeitschnitte sowie die leichte Welligkeit der Kurven sind damit zu erklären. — Da die Dichte für große x sehr klein wird, wurde auch $\log q$ aufgetragen, um beide Zeitschnitte noch unterscheiden zu können.

Abb. 12 zeigt uns nun, daß sich tatsächlich auch für große x eine Art endgültiger Verteilung eingespielt hat. Vielleicht am auffallendsten ist der praktisch geradlinige Verlauf der Geschwindigkeit über den ganzen Bereich hinweg, während sich für

alle anderen Größen (Dichte, Temperatur, Druck, Schallgeschwindigkeit, Entropie) keine derart einfache Darstellung ergab¹².

Diese sich einspielende Verteilung erfüllt alle Forderungen der Homologie und zeigt doch keinerlei Ansatz zu Singularitäten, im Gegensatz zur bisherigen Meinung über Homologie-Lösungen.

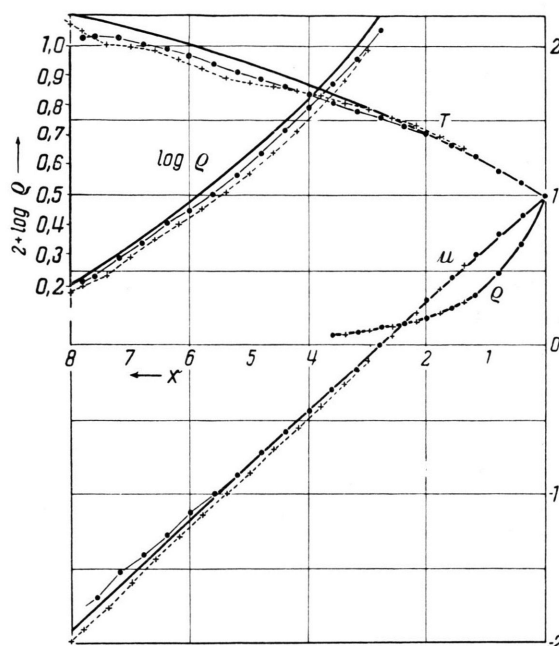


Abb. 12. Der weitere Verlauf der sich einspielenden Verteilung für zwei Zeitabschnitte der Anfangsverteilung von Abb. 8. $t=16,9$, + + + + + $t=8,9$. Zum Vergleich dick eingezeichnet die singuläre Homologie-Lösung $k_0 = 0,38927$.

5. Die singuläre Lösung

Ausgehend von diesem Widerspruch wurde das Problem der Homologie erneut aufgegriffen. Häfele fand, daß bei der früheren Diskussion eine singuläre Lösung der Homologie-Gleichungen übersehen worden war, die durch zwei singuläre Punkte der Differentialgleichung geht. Und nur längs dieser einen Lösung sind die Werte von Geschwindigkeit, Dichte und Temperatur stets regulär für endliches x . Erst für $x \rightarrow \infty$ geht die Temperatur nach unendlich, Druck und Dichte dagegen nach null. Der hierzu gehörige „kritische Wert k_0 “ des Homologie-

¹² Z. B. gilt für die nach Abschn. 3 normierten Größen in guter Näherung:

$$q = (1 + x/3)^{-3}, \quad p = q^{0,821}.$$

Parameters k wurde von Häfele durch umfangreiche numerische Rechnung zu

$$k_0 = 0,38927 \quad (42)$$

ermittelt; in der Umgebung von k_0 ändern die Lösungen unstetig ihren Typus. Die gelegentlich zum Vergleich benutzte Lösung für $k=0,39$ stimmt bis dicht vor ihrer Singularität mit der singulären Lösung praktisch überein.

Eine ausführliche Darstellung ist von Häfele vorgesehen. Hier wollen wir zum Vergleich nur diese singuläre Lösung in Abb. 12 mit einzeichnen. Wir sehen, daß sie mit unserer sich stets einspielenden Lösung innerhalb von deren (hier, wie schon erwähnt, besonders großen) Fehlergrenzen übereinstimmt, so daß wir beide miteinander identifizieren wollen.

Zusammengefaßt lautet das Ergebnis der numerischen Rechnung: Lassen wir eine Wolke endlicher Ausdehnung (ohne weiteren Impulsnachschub dahinter) in ein ruhendes Gas konstanter Dichte und zu vernachlässigender Temperatur hineinlaufen, so spielt sich¹³ nach einiger Zeit hinter der Stoßfront eine *endgültige Verteilung* ein, und zwar die inzwischen von Häfele gefundene singuläre Lösung der Homologie-Gleichungen.

¹³ Falls die Anfangsverteilung so gewählt wurde, daß sich hinter der Front keine neuen Fronten ausbilden.

¹⁴ Für die mathematische Durchführung ist dabei vorteilhaft, daß für einen stets linearen Verlauf der Geschwindigkeit die vollständigen Lösungen der Euler-

Zum Verständnis der Struktur dieser Lösung könnte vielleicht die Annahme beitragen, daß bei derartigen Abströmvorgängen der nahezu lineare Verlauf der Geschwindigkeit dasjenige ist, was sich primär einstellt¹⁴. Beispielsweise kann man einer Arbeit von Burgers¹⁵ entnehmen, daß sich ebenfalls ein linearer Verlauf der Geschwindigkeit einstellt, wenn man ein ruhendes Gas *konstanter Entropie* und Dichte plötzlich ins Vakuum abströmen läßt. Weiterhin kann man zeigen, daß für diesen isentropen Fall der Homologie-Ansatz nur eine einzige Lösung besitzt: eben dieses lineare Abströmen. —

Weiterhin zeigte v. Hagenow in Diskussionsbeiträgen, daß die Forderung, „eine sich einspielende Verteilung solle nach langer Zeit keinerlei Maßstäbe mehr auszeichnen“, gerade auf eine lineare Geschwindigkeitsverteilung führt.

Beide Ansätze sollen aber hier nicht weiter fortgeführt werden und bleiben eventuell einer späteren Arbeit vorbehalten.

Die Verfasser danken Herrn Prof. v. Weizsäcker für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche wertvolle Diskussionen.

schen Gleichungen sich explizit angeben lassen. Die durch Fußnote 12 gegebenen Beziehungen sind Untergruppen dieser Lösungen.

¹⁵ Burgers und weitere Literaturangaben bei D. C. Pack, Monthly Notices **113**, 43 [1953].